komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen als geordnetes Paar

$$\boxed{z=(a;b)}$$

mit $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\mathbb{R}$

a : Realteil von z — $Re\ z=a$ — $\Re z=a$

b : Imaginärteil von z — $Im\ z=b$ — $\Im z=b$

Gaußsche (komplexe) Zahlenebene

x − Koordinate	reelle Achse	Einheit 1
y − Koordinate	imaginäre Achse	Einheit j

imaginäre Einheit

$$\boxed{\begin{aligned} j^2&=-1\\ j&=\sqrt{-1}\end{aligned}} \qquad (0;1)=j \qquad \frac{1}{j}=-j$$

$$j^{4n}=1\,;\ j^{4n+1}=j\,;\ j^{4n+2}=-1\,;\ j^{4n+3}=-j \quad \text{mit } n\in\mathbb{N}$$

---

kartesische Form

$$\boxed{z=a+b\,j}$$

$z_1=z_2$, wenn $a_1=a_2$ und $b_1=b_2$

Betrag: $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

konjugiert Komplexe Zahlen

$$z=a+b\,j$$
$$\downarrow$$
$$z^*=a-b\,j$$

$$Im(z^*)=-Im(z)$$

$$(z^*)^*=z$$

$$z=z^*\Rightarrow z\in\mathbb{R}$$

Addition / Subtraktion

$$z_1\pm z_2$$
$$=(a_1\pm a_2)+j\cdot(b_1\pm b_2)$$

Multiplikation

$$z_1\cdot z_2$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+j\cdot(a_1b_2+a_2b_1)$$

Division

$$z_{1\text{div}}\,z_2 \qquad \text{mit } z_2\neq 0$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}+j\cdot\frac{-a_1b_2+a_2b_1}{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}$$

---

trigonometrische Form

$$\boxed{z=r(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)}$$

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$a=r\cos\varphi \qquad b=r\sin\varphi$$

$$\tan\varphi=\frac{b}{a}$$

$$z^*=r(\cos\varphi-j\cdot\sin\varphi)$$

Multiplikation / Division

$$z_{1\text{cdot}}\,z_2$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+j\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$z_1\div z_2 \qquad \text{mit } z_2\neq 0$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+j\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Exponentialform

$$\boxed{z=r\,e^{j\varphi}}$$

Potenzieren

$$z^n=(r\cdot e^{j\cdot\varphi})^n=r\cdot{}^n e^{j\cdot n\varphi}$$

mit $n\in\mathbb{Z}$

Radizieren

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{j\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{360°}{n}\right)}$$

mit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

und $k\in[\,0;n\,[_{\mathbb{Z}}$

Logarithmieren

$$\ln z$$
$$=\ln r+j\cdot(\varphi+k\cdot 360°)$$
$$=\ln r+j\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi)$$

φ im Bogenmaß !

mit $k\in\mathbb{Z}$

für $k=0$: Hauptwert

$$Ln\,z=\ln r+j\cdot\varphi$$

Multiplikation/Division

$$z_1\cdot z_2$$
$$=r_1r_2\cdot e^{j\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z_1\div z_2 \qquad \text{mit } z_2\neq 0$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot e^{j\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$$